

# Extensión del método de modos acoplados para el estudio de medios quirales ilimitados

Álvaro Gómez<sup>(1)</sup>, Ismael Barba<sup>(1)</sup>, Ana C. L. Cabeceira<sup>(1)</sup>, José Represa<sup>(1)</sup>,  
 Angel Vegas<sup>(2)</sup> y Miguel A. Solano<sup>(2)</sup>  
 gomezal@ee.uva.es, ibarba@ee.uva.es, anacris@ee.uva.es, jrepresa@ee.uva.es,  
 vegasa@unican.es, solanom@unican.es.

<sup>(1)</sup> Dpto. de Electricidad y Electrónica. Universidad de Valladolid. Pº Prado de la Magdalena s/n, 47011 Valladolid.

<sup>(2)</sup> Dpto. de Ing. de Comunicaciones. Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander.

**Abstract-** The Coupled-Mode Method (CMM) is a semi-numerical method in the frequency domain for studying electromagnetic propagation, originally formulated for closed structures, widely used in the literature. In this paper, the formulation of the CMM is extended to the particular case of wave propagation in an unbounded isotropic chiral media (ICM) and the propagation constants and the electromagnetic field components are obtained numerically. To test the accuracy of the approximated results, comparisons with the analytical results are established.

## I. INTRODUCCIÓN

El método de modos acoplados (MMA) es un método semi-analítico, propuesto originalmente por Schelkunoff [1], y utilizado con mucha frecuencia en el estudio de la propagación electromagnética en el interior de estructuras cerradas limitadas por paredes conductoras perfectas (PEC), tales como guías de onda de planos paralelos, rectangulares o circulares, y que están rellenas, parcial o totalmente, de medios isotropos, anisotropos o bi-isotropos [2]-[5]. Se trata de un método de momentos, en el que las funciones de base y test son las mismas, muy versátil para el análisis de estructuras que presentan discontinuidades de diferentes tipos (eléctricas, magnéticas, quirales...), puesto que no es necesario rehacer la formulación cuando varía la geometría del problema. Básicamente, el MMA consiste en desarrollar en serie, a partir de un conjunto de funciones base, las componentes del campo electromagnético dentro de la guía y calcular los coeficientes de dichos desarrollos [1]-[5]. A la vista de los trabajos publicados sobre la aplicación del MMA a la propagación guiada, queda claro que el comportamiento del método es muy bueno y robusto. Pero, ¿qué sucede cuando las dimensiones de la superficie transversal de la guía son eléctricamente grandes? ¿Se podría dar el caso de que una guía de ondas muy grande reprodujera en su parte central un medio ilimitado, siendo los resultados obtenidos de la propagación guiada, campo y constante de propagación, los mismos que los que se obtienen en el medio libre? Además, en caso de que esto fuera posible, ¿se podría describir este comportamiento mediante el método de modos acoplados? En esta comunicación se analiza la influencia del alejamiento de las PEC de una guía de onda rectangular, llena de un medio quiral isotropo, sobre la solución numérica obtenida de las constantes de propagación y el campo electromagnético. Para comprobar la exactitud de los

resultados numéricos, se comparan con la solución analítica de la ecuación de ondas del medio quiral isotropo ilimitado [6]. Es importante notar que los resultados numéricos del campo electromagnético se aproximan más a los analíticos en la parte central de la superficie transversal de la guía.

## II. TEORÍA

### A. Solución analítica del medio ilimitado

Es conocido que el comportamiento electromagnético de los medios quirales isotropos (MQI) puede ser descrito mediante diferentes conjuntos de ecuaciones constitutivas [6],[7]. Hemos elegido el conjunto conocido como *relaciones constitutivas básicas* introducido por Lindell *et al.* [7]. Estas ecuaciones se pueden expresar como:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} - j\kappa \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{H}, \quad (1a)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} + j\kappa \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{E}, \quad (1b)$$

donde  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa del medio,  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío,  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa,  $\mu_0$  la permeabilidad del vacío y  $\kappa$  es el “parámetro de Pasteur” o de quiralidad. La solución de la ecuación de ondas para un medio descrito (1) puede ser vista en detalle en [6]. La solución para el campo electromagnético puede ser dividida en dos componentes,  $\vec{E}_+, \vec{H}_+$  y  $\vec{E}_-, \vec{H}_-$  [6]. Estos “campos de onda”, que serán las soluciones básicas, representan ondas planas circularmente polarizadas a derechas y a izquierdas, respectivamente (CPD y CPI). El número de ondas de las mismas viene dado por:

$$k_{\pm} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left( 1 \pm \frac{\kappa}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right). \quad (2)$$

Aquí,  $k_+$  es el número de ondas de la onda CPD, mientras  $k_-$  es el de la CPI.

Estos dos campos de onda se caracterizan por propagarse de forma independiente, además de por satisfacer la siguiente relación [6]:

$$\vec{E}_{\pm} = \mp j \eta_{\pm} \vec{H}_{\pm}, \quad (3)$$

donde  $\eta_+$  y  $\eta_-$  son las impedancias de onda de cada campo. Para un medio quiral bi-isótropo, ambas impedancias de onda coinciden con la de un medio isótropo no quiral, es decir,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ .

### B. Solución numérica con el MMA

Existen dos formulaciones diferentes del método de modos acoplados (MMA) para el análisis de la propagación de ondas electromagnéticas dentro de una guía de ondas, y que se pueden clasificar como formulaciones EH y EB [3]-[4]. En la formulación EH, los campos que se utilizan son  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , mientras que en la EB se trabaja con  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En una publicación anterior [4], se demostró por un lado que el campo electromagnético obtenido utilizando la formulación EB satisface todas las condiciones de contorno en las paredes PEC que delimitan la guía. Por otro lado, también se demostró que el campo electromagnético derivado de la formulación EH no verifica todas las condiciones de contorno. En particular, las componentes normales del campo magnético se anulan sobre las paredes PEC en contacto con el medio quiral, cuando deberían ser distintas de cero. Se puede comprobar [4] que las mayores diferencias entre los resultados obtenidos mediante las dos formulaciones se obtienen precisamente en las proximidades de esas PEC, y que éstas decrecen a medida que la salida se aproxima al centro de la guía. Puesto que en el análisis que presentamos se va a aumentar considerablemente la sección transversal de la guía y vamos a centrar nuestra atención en la región central de la misma, para nuestros propósitos podemos asumir que con la formulación EH obtendremos resultados satisfactorios. Como se puede ver en [5], hay dos posibles estrategias para la formulación EH del MMA: la formulación indirecta o EHI que requiere invertir matrices en el cálculo de los coeficientes de los desarrollos de los campos, y la formulación directa o EHD en la que no es necesario la inversión de matrices. Ambas estrategias son desarrolladas en detalle en [5], por lo que no consideramos necesario repetir aquí las expresiones. En particular, se ha demostrado que, en guías rectangulares, se obtienen mejores resultados mediante la estrategia indirecta aún siendo necesaria la inversión de matrices [5]. Por esta razón, únicamente presentaremos resultados obtenidos mediante esta estrategia. Como veremos en la sección de resultados, se obtiene una muy buena aproximación entre los resultados analíticos y los obtenidos numéricamente.

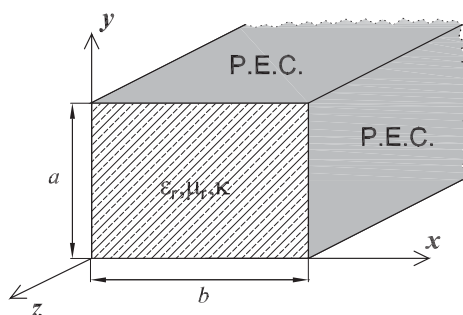


Fig. 1. Esquema de una guía rectangular rellena totalmente con un material quiral.

## III. RESULTADOS

En esta sección contrastaremos los resultados obtenidos mediante el método MMA. Compararemos la reproducción mediante el MMA de una onda propagándose en un medio quiral isótropo ilimitado con los resultados obtenidos analíticamente. Para ello prestaremos especial atención a los siguientes puntos:

- El valor final de los números de ondas  $k_+$  y  $k_-$ , obtenidos mediante el MMA, y su convergencia en función del número de modos base utilizados en las expansiones de los campos, y también de las dimensiones de la guía. Estos valores nos permitirán estimar la precisión de los resultados numéricos.
- La existencia de dos ondas planas circularmente polarizadas, CPD y CPI en la sección central de la guía, que corresponden, respectivamente, a los campos de onda  $\vec{E}_+, \vec{H}_+$  y  $\vec{E}_-, \vec{H}_-$ .
- El valor numérico de la impedancia de onda obtenido mediante el MMA, comparado con el analítico.

### A. Convergencia de los números de onda

En primer lugar se ha calculado el valor de la constante de fase  $\beta$  del modo fundamental de una guía de onda cuadrada ( $a = b$ ) llena de un MQI, caracterizado por  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\kappa = 1,5$  y una frecuencia  $f = 9$  GHz, para diferentes valores del lado de la guía  $a$  y distintos números de modos base. En la tabla I se muestra el error relativo de  $\beta$  calculado mediante el MMA con respecto al valor exacto de  $k_+$ .

$a \backslash N$	0.033 m	0.1 m	1 m	10 m
5	3,44 %	2,42 %	2,27 %	2,27 %
10	1,37 %	0,23 %	0,07 %	0,07 %
20	1,25 %	0,17 %	< 0,01 %	< 0,01 %
30	1,21 %	0,15 %	< 0,01 %	~ 0 %
50	1,21 %	0,14 %	< 0,01 %	~ 0 %

Tabla 1. Error relativo (%) de  $\beta$  con respecto al valor exacto de  $k_+$  en función de las dimensiones de la guía de ondas ( $a$ ) y del número de modos base ( $N$ ). El valor exacto de  $k_+ = 4,5$  a  $f = 9$  GHz.

Examinando la Tabla I se comprueba que el error relativo de  $\beta$  disminuye a medida que aumentan el número de modos y las dimensiones de la guía. Cuando las dimensiones de la guía son eléctricamente pequeñas (alrededor de  $\lambda_0 = c/f$ ), el valor numérico de  $\beta$  no converge a  $k_+$ . Esto era de esperar, puesto que las paredes de la guía no se encuentran lo suficientemente alejadas como para que se puedan despreciar los efectos de guiado. En cambio, a medida que las dimensiones de la guía aumentan, el error relativo de  $\beta$  disminuye para un número fijo de modos base. Esto se debe a que al alejar las paredes se reducen los efectos de guiado. A la vista de estos resultados, con una guía de  $a = b = 10$  m se obtienen unos resultados muy precisos de  $k_+$  (análogas conclusiones se obtienen para  $k_-$ ).

En la Figura 2 se representa la variación de  $k_+$  y  $k_-$ , normalizada a  $k_0$ , respecto al número de modos base introducidos en los desarrollos de las componentes del campo electromagnético (*diagramas de convergencia*), para una guía de onda cuadrada, Fig. 1,  $a = b = 10$  m. Aunque los modos

base se introducen por orden creciente de su frecuencia de corte, se ha optimizado la elección de los mismos excluyendo aquellos modos  $TE_{nm}$  y  $TM_{nm}$  para los que  $n + m$  es par. Esta discriminación se debe a que los modos de orden  $n + m$  par producen un campo nulo en el centro de la guía y no influyen en el cálculo de los números de onda  $k_+$  y  $k_-$ . Examinando la Fig. 2, se puede decir que la convergencia de  $k_+/k_0$  y  $k_-/k_0$  se alcanza con unos 30-50 modos base, aunque con sólo 10 modos base, el error relativo es menor del 0,1 %.

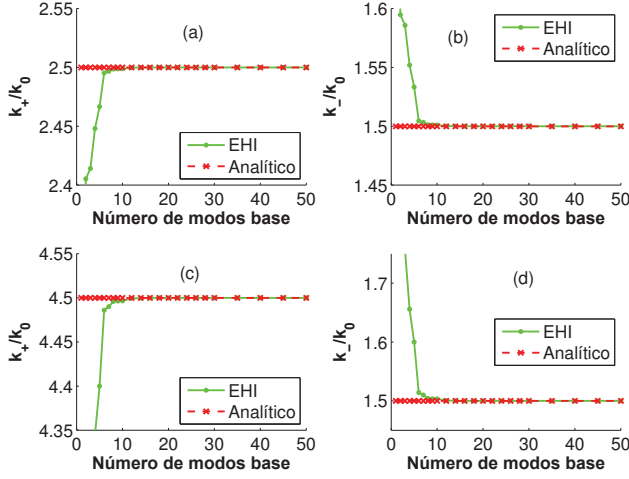


Fig. 2. Diagramas de convergencia de  $k_+$  y  $k_-$ , normalizados a los valores del número de ondas en propagación libre, en función del número de modos base de la estructura de la figura 1. Datos: (a) y (b);  $\epsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 0,5$ , luego  $k_+/k_0 = 2,5$  y  $k_-/k_0 = 1,5$ . (c) y (d)  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ , luego  $k_+/k_0 = 4,5$  y  $k_-/k_0 = 1,5$ ;  $a = b = 10$  m y  $f = 9$  GHz.

### B. Campo electromagnético

Una propiedad intrínseca del MMA es que la convergencia del campo electromagnético es más lenta que la de la constante de fase, ya que el valor de  $\beta$  influye en el resultado de las componentes del campo electromagnético. Así, para asegurarnos un valor correcto de las componentes del campo EM, en los resultados que se muestran a continuación se toman un total de 50 modos base.

En la Fig. 3 se muestra la vista superior de la variación, respecto a las coordenadas transversales  $x$  y  $y$ , de la parte real e imaginaria de  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  normalizadas al módulo del valor máximo del campo eléctrico, correspondientes a los campos de onda  $\vec{E}_+$ ,  $\vec{H}_+$  de la guía de onda de la Fig. 1. Las características de la estructura se encuentran en el pie de figura. Examinando la figura se observa que la variación del campo eléctrico se corresponde con el de una onda plana TEM, puesto que la componente  $E_z$  es prácticamente cero (lo mismo sucede para  $H_z$ ). En la zona central de la guía, existe una región en la que el campo permanece constante. Si prestamos atención a este área y representamos las componentes normalizadas al valor máximo del campo eléctrico y del campo magnético del campo de onda  $\vec{E}_+$ ,  $\vec{H}_+$  (figuras 4 y 5), vemos que la variación de los campos con las coordenadas transversales es prácticamente nula. Lo cual da lugar a que la onda plana sea uniforme. Además, el campo eléctrico es del tipo  $\vec{E}_{0+}(\vec{a}_y + j\vec{a}_x)$  y el campo magnético  $\vec{H}_{0+}(-\vec{a}_x + j\vec{a}_y)$ , por lo que se puede concluir que la onda

plana asociada al campo de onda  $\vec{E}_+$ ,  $\vec{H}_+$  está circularmente polarizada a derechas (CPD). Representando las componentes del campo de onda  $\vec{E}_-$ ,  $\vec{H}_-$  en la misma región espacial, resultan unos campos constantes del tipo  $\vec{E}_{0+}(\vec{a}_y - j\vec{a}_x)$  y  $\vec{H}_{0+}(\vec{a}_x + j\vec{a}_y)$ , con la diferencia de que ahora se corresponden con una onda plana circularmente polarizadas a izquierdas (CPI).

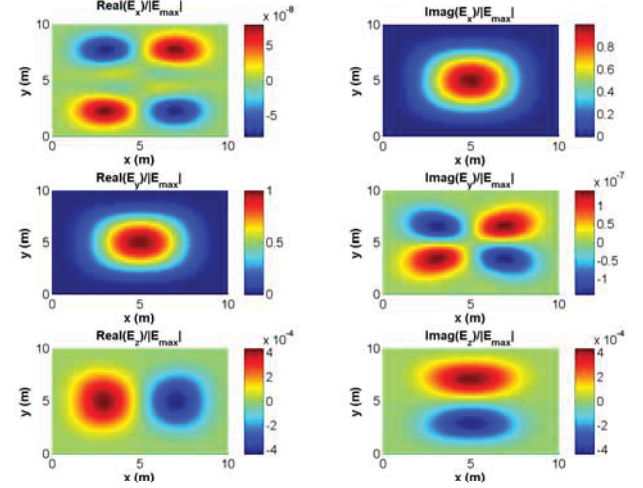


Fig. 3. Componentes del campo eléctrico (partes real e imaginaria), normalizadas al módulo del valor máximo del mismo, como función de las coordenadas  $x$  y  $y$ , a lo largo de la sección transversal de la guía representada en la figura 1. El número de modos base es 50. Datos:  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ ;  $a = b = 10$  m y  $f = 9$  GHz.

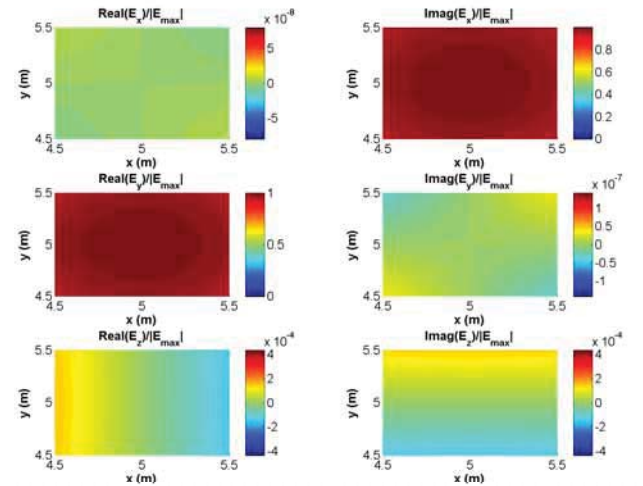


Fig. 4. Componentes del campo eléctrico (partes real e imaginaria), normalizadas al módulo del valor máximo del mismo, como función de las coordenadas  $x$  y  $y$ , restringidas a la zona central de la sección transversal de la guía representada en la figura 1. El número de modos base es 50. Datos:  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ ;  $a = b = 10$  m y  $f = 9$  GHz.



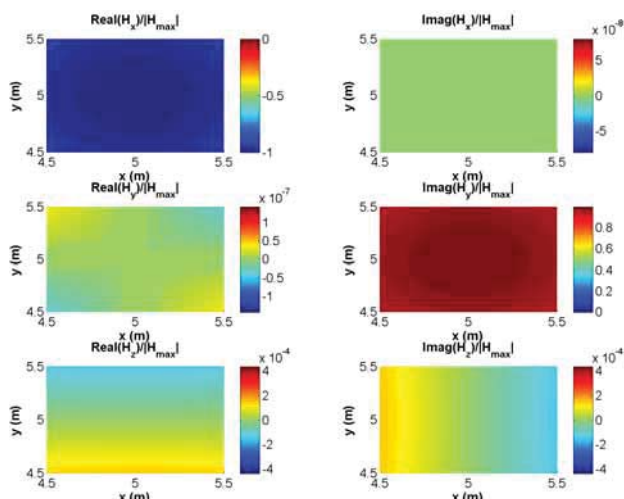


Fig. 5. Componentes del campo eléctrico (partes real e imaginaria), normalizadas al módulo del valor máximo del mismo, como función de las coordenadas  $x$  e  $y$ , restringidas a la zona central de la sección transversal de la guía representada en la figura 1. El número de modos base es 50. Datos:  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ ;  $a = b = 10$  m y  $f = 9$  GHz.

### C. Valor numérico de la impedancia de onda

En el apartado anterior se ha comprobado que en la parte central de la guía los campos son constantes y que se propagan como ondas planas circularmente polarizadas. Cuando se resuelve analíticamente la ecuación de ondas en un medio quiral, los campos quedan indeterminados por las amplitudes. Éstas, se pueden obtener a partir de la potencia que transporta la guía, pero nunca a priori. Lo que sí se puede calcular analíticamente es el valor de la impedancia de onda asociada a cada uno de los “campos de onda”. En la figura 6 se muestra el valor numérico de la impedancia de onda (parte real e imaginaria) de los “campos de onda”  $\vec{E}_+, \vec{H}_+$  y  $\vec{E}_-, \vec{H}_-$ , obtenidas mediante el MMA, para la estructura de la figura 1. En este caso, el valor analítico de las impedancias de onda de ambos campos de onda viene dado por  $\eta = 120\pi/3 \Omega \approx 125,66 \Omega$  que concuerda perfectamente con los resultados obtenidos con el MMA, puesto que el error relativo en el peor de los casos es menor del 0,01%.

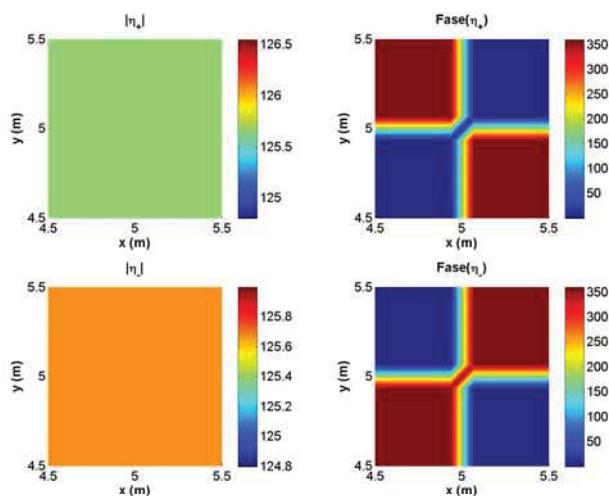


Fig. 6. Impedancia de onda (partes real e imaginaria), para las ondas CPD ( $\eta_+$ ) y CPI ( $\eta_-$ ), en función de las coordenadas  $x$  e  $y$  restringidas a la zona central de la sección transversal de la guía representada en la figura 1. El número de modos base es 50. Datos:  $\epsilon_r = 9$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ ;  $a = b = 10$  m y  $f = 9$  GHz.

## IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha verificado que un medio quiral isótropo ilimitado se puede aproximar por una guía de onda llena del mismo material y con una sección transversal suficientemente grande, y que puede modelarse mediante el MMA. Se ha mostrado que las constantes de fase obtenidas con el MMA y la solución analítica son prácticamente iguales (el error relativo es menor del 0,01%). Se ha visto como en cierta región de la superficie transversal de la guía, el campo electromagnético se propaga como una onda plana. El “campo de onda”  $\vec{E}_+, \vec{H}_+$  tiene asociada una onda CPD, mientras que  $\vec{E}_-, \vec{H}_-$  tiene asociada una onda CPI. Además, se ha calculado numéricamente el valor de las impedancias de onda de ambos campos de onda y se ha comprobado que concuerdan con la solución analítica.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación del MEC a través de los proyectos TIC-2003-09677-C03-01 y TIC-2003-09677-C03-02.

## REFERENCIAS

- [1] S. A. Schelkunoff, “Generalized Telegraphist’s equations for waveguides,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 31, pp. 784–801, July 1952.
- [2] K. Ogusu, “Numerical analysis of the rectangular dielectric waveguide and its modifications,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT25, pp. 874–885, Nov. 1977.
- [3] A. Gómez, M. A. Solano and A. Vegas, “New formulation of the coupled mode method for the analysis of chirowaveguides,” *Proc. of SPIE*, vol. 4806, pp 290–301, July 2002.
- [4] A. Gómez, A. Vegas and M. A. Solano “A brief discussion on the different formulations of the coupled mode method in chiral media: application to the parallel-plate chirowaveguide,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 42, pp. 181–185, August 2005.
- [5] —, “On two different formulations of the coupled mode method: application to 3D rectangular chirowaveguides,” *Int J Electron Commun*, Accepted for publication, 2006.
- [6] I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov and A.J. Vitanen, *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media*, Artech House, Boston, 1994, chapter 2.
- [7] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, “Bi-isotropic constitutive relations,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 4, pp. 295–297, Jul.1991.